NATIONELLT KURSPROV I MATEMATIK KURS D VÅREN 2002

Anvisningar

Provtid	240 minuter för Del I och Del II tillsammans. Vi rekommenderar att du använder högst 60 minuter för arbetet med Del I.
Hjälpmedel	**Del I:** ”Formler till nationellt prov i matematik kurs C, D och E”. *Observera att miniräknare ej är tillåten på denna del.* **Del II:** Miniräknare och ”Formler till nationellt prov i matematik kurs C, D och E”.
Provmaterialet	Provmaterialet inlämnas tillsammans med dina lösningar. Skriv ditt namn och komvux/gymnasieprogram på de papper du lämnar in. *Lösningar till Del I ska lämnas in innan du får tillgång till miniräknaren. Redovisa därför ditt arbete på Del I på separat papper. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.*
Provet	Provet består av totalt 15 uppgifter. **Del I** består av 7 uppgifter och **Del II** av 8 uppgifter. Till några uppgifter (där det står *Endast svar fordras*) behöver bara ett kort svar anges. Till övriga uppgifter räcker det inte med bara ett kort svar utan det krävs att du skriver ned vad du gör, att du förklarar dina tankegångar, att du ritar figurer vid behov och att du vid numerisk/grafisk problemlösning visar hur du använder ditt hjälpmedel. Uppgift 15 är en större uppgift, som kan ta upp till en timme att lösa fullständigt. Det är viktigt att du försöker lösa denna uppgift. I uppgiften finns en beskrivning av vad läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av ditt arbete. Försök att lösa alla uppgifterna. Det kan vara relativt lätt att även i slutet av provet få någon poäng för en påbörjad lösning eller redovisning. Även en påbörjad icke slutförd redovisning kan ge underlag för positiv bedömning.
Poäng och betygsgränser	Provet ger maximalt 43 poäng. Efter varje uppgift anges maximala antalet poäng som du kan få för din lösning. Om en uppgift kan ge 2 g-poäng och 1 vg-poäng skrivs detta (2/1). Några uppgifter är markerade med ¤, vilket innebär att de mer än andra uppgifter erbjuder möjligheter att visa kunskaper som kan kopplas till MVG-kriterierna i betygskriterier 2000. Undre gräns för provbetyget Godkänd: 12 poäng. Väl godkänd: 24 poäng varav minst 6 vg-poäng. Mycket väl godkänd: Kraven för Väl godkänd ska vara väl uppfyllda. Dessutom kommer läraren att ta hänsyn till hur väl du löser ¤-uppgifterna.

Namn: ______________________________ Skola: ______________________________

Komvux/gymnasieprogram: ____

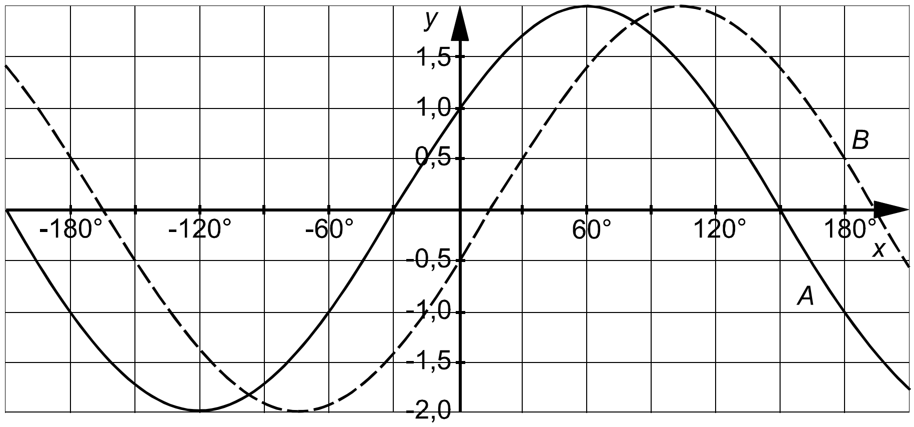
Del I

Denna del består av 7 uppgifter och är avsedd att genomföras utan miniräknare. Dina lösningar på denna del görs på separat papper som ska lämnas in innan du får tillgång till din miniräknare.
Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

1. Beräkna $\int_0^3 (x^2 + 4x)\mathrm{d}x$ (2/0)

2. Beräkna $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ då $f(x) = 2\sin x$ (2/0)

3.



Kurva *A* beskrivs av ekvationen $y = 2\sin(x + 30°)$
Ange en ekvation för kurva *B*. *Endast svar fordras* (2/0)

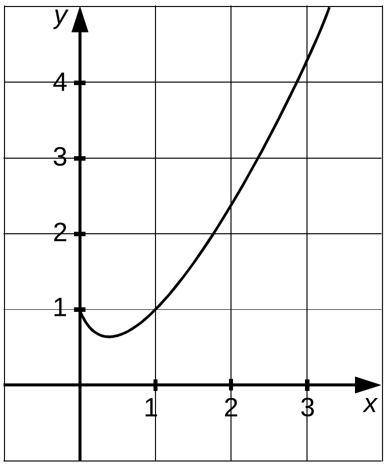
4. Vilken eller vilka av nedanstående ekvationer har två lösningar i intervallet $0 \le x \le \pi$

A: $\cos x = -0{,}3$
B: $\sin x = 0{,}8$ *Endast svar fordras* (1/0)

5. Bestäm $g(x)$ om $g'(x) = \sin 3x + \cos 2x$ och $g(\pi) = 2$ (3/0)

6. Bestäm det positiva talet a så att $\int_1^a \frac{1}{x}\,dx = 2$ (2/0)

7.



Ovanstående diagram visar grafen till en funktion $f(x)$ vars derivata är $1 + \ln x$

Beräkna med hjälp av diagrammet $\int_1^3 (1 + \ln x)\,dx$ (0/2)

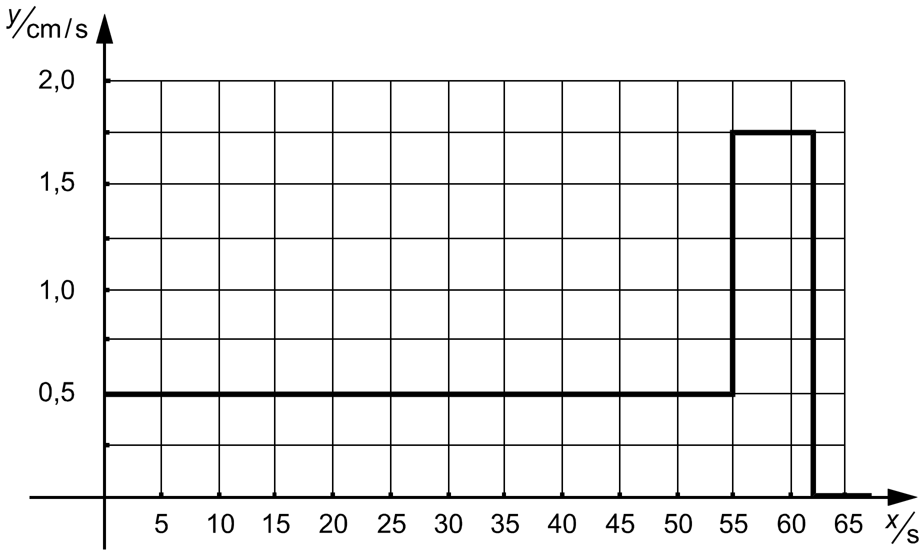
DEL II

Denna del består av 8 uppgifter och är avsedd att genomföras med miniräknare. Observera att arbetet med Del II kan påbörjas utan tillgång till miniräknare.

8. Visa att $y = 10\,\mathrm{e}^{2x}$ är en lösning till differentialekvationen $y' - 2y = 0$ (2/0)

9. En triangel har sidorna 5,0 cm, 6,0 cm och 7,0 cm.
Beräkna triangelns största vinkel. (2/0)

10. Vatten rinner med jämn hastighet ner i en från början tom behållare.
Nedanstående figur visar med vilken hastighet, *y* cm/s, vattennivån stiger i behållaren.

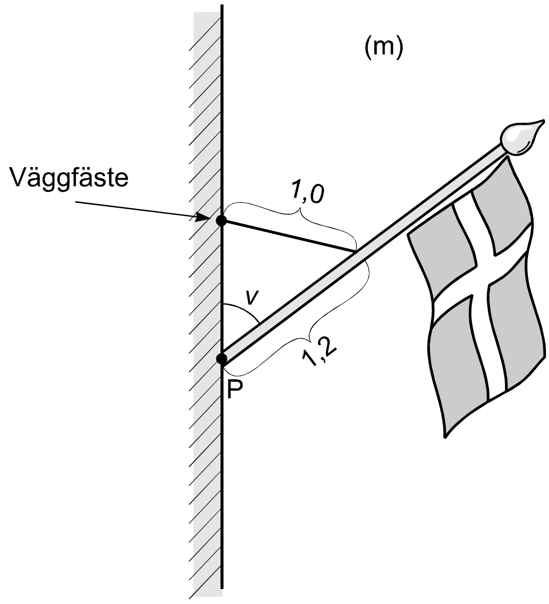


a) Hur lång tid tar det innan vattnet slutar rinna? (1/0)

b) Hur högt når vattennivån? (2/0)

c) Rita en skiss som visar hur behållaren kan se ut. (0/1)

11.



Över dörren till en butik sitter en flaggstång. Den hålls upp av ett stag med längden 1,0 m. Butiksägaren ska flytta stagets väggfäste så att flaggstången bildar vinkeln $v = 30°$ med väggen. Väggfästet placeras rakt ovanför punkten P. Bestäm avståndet mellan P och väggfästets nya läge. (2/1)

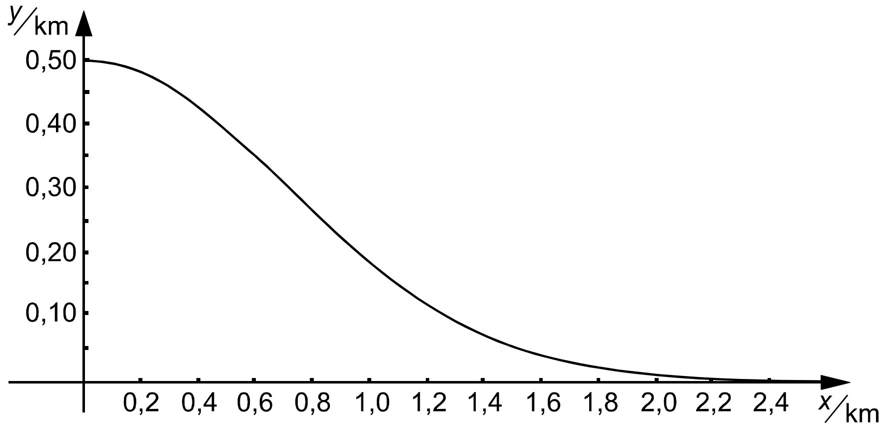
12. Kurvorna $y = e^{0,2x}$ och $y = x^2$ innesluter tillsammans med y-axeln ett område i första kvadranten. Teckna integralen för områdets area samt bestäm denna area med minst tre värdesiffror. (0/3)

13. a) Visa att $1 + \cos 4x = 2\cos^2 2x$ (0/1)

b) Beräkna det exakta värdet av integralen

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} 2\cos^2 2x \, dx$$ (0/2)

14. En skidbacke har fallhöjden 500 meter. Banprofilen ser du i bilden nedan.



Höjden *y* km är en funktion av sträckan *x* km.
Sambandet mellan *y* och *x* ges av

$y = 0{,}5\mathrm{e}^{-x^2} \quad , \quad 0 \le x \le 2{,}5$

a) Bestäm backens lutning för $x = 0{,}8$ (0/2)

Ett allmänt sätt att beskriva backar med liknande banprofil som ovan ges av funktionen

$y = 0{,}5\mathrm{e}^{-ax^2} \quad , \quad 0 \le x \le 2{,}5$

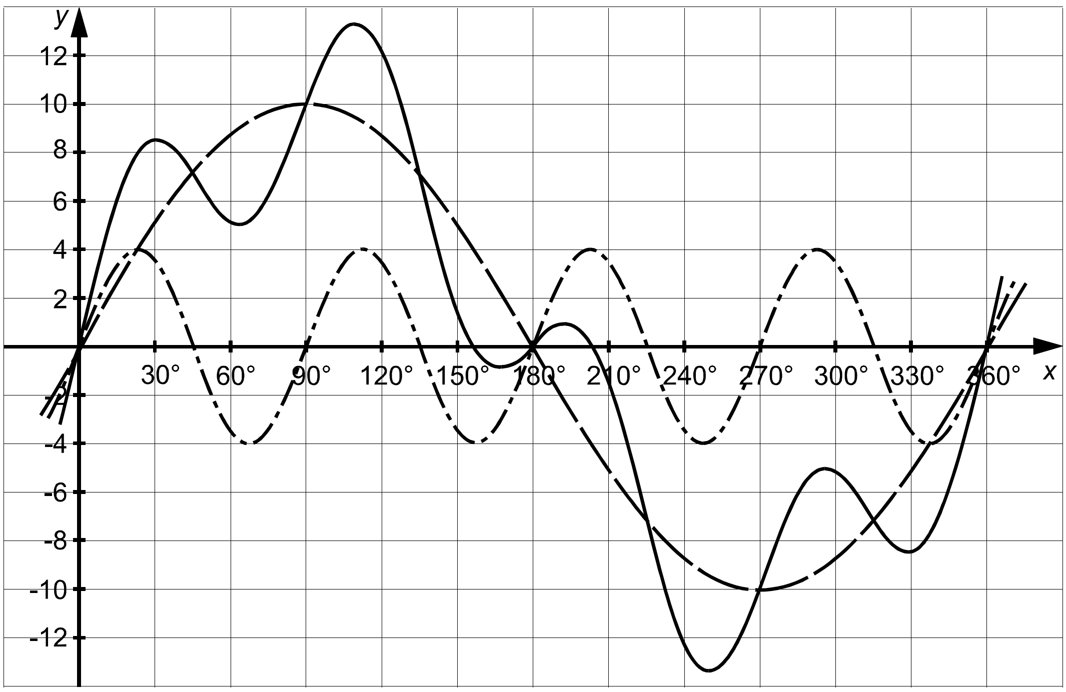
där *a* är en positiv konstant.

b) Ställ upp en ekvation för bestämning av *x*-värdet i den punkt där backar med en sådan banprofil är brantast. (0/3/¤)

c) Bestäm *a* så att backen är brantast för $x = 1{,}0$ (0/1)

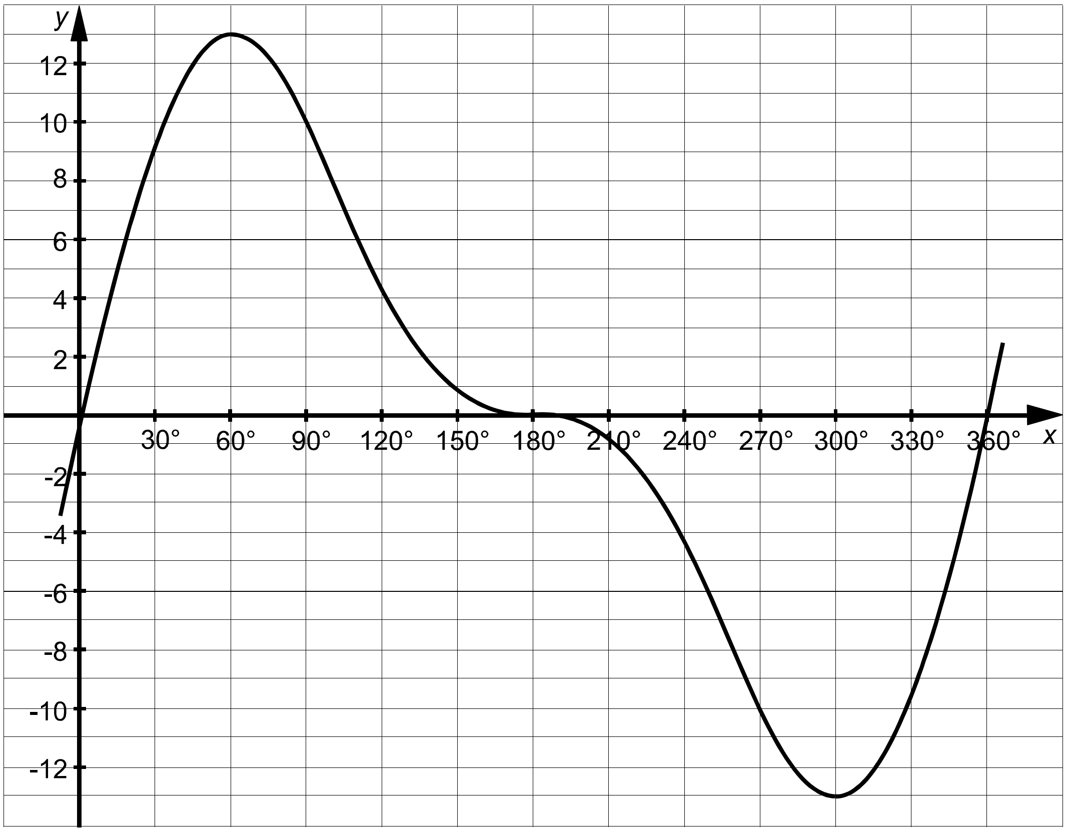
15. En ton låter olika då den spelas på orgel eller fiol. Detta beror på att klangen är sammansatt av en grundton och flera så kallade övertoner. Övertonerna kan vara olika starka och det är detta som ger instrumentets klangfärg.
Övertonernas perioder förhåller sig på ett enkelt sätt till grundtonen. Om vi väljer en fiolsträng som exempel så kan den ge en ton som beskrivs med en summa av termer $a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + a_3 \sin 3x + ...$.
$a_1 \sin x$ motsvarar grundtonen och sedan följer 1:a övertonen, 2:a övertonen osv.

- Figur 1 visar graferna till de funktioner som beskriver en grundton $(y = a \sin x)$,dess tredje överton $(y = b \sin 4x)$ samt den ton som fås av dessa tillsammans $(y = a \sin x + b \sin 4x)$.
  Bestäm konstanterna *a* och *b*.



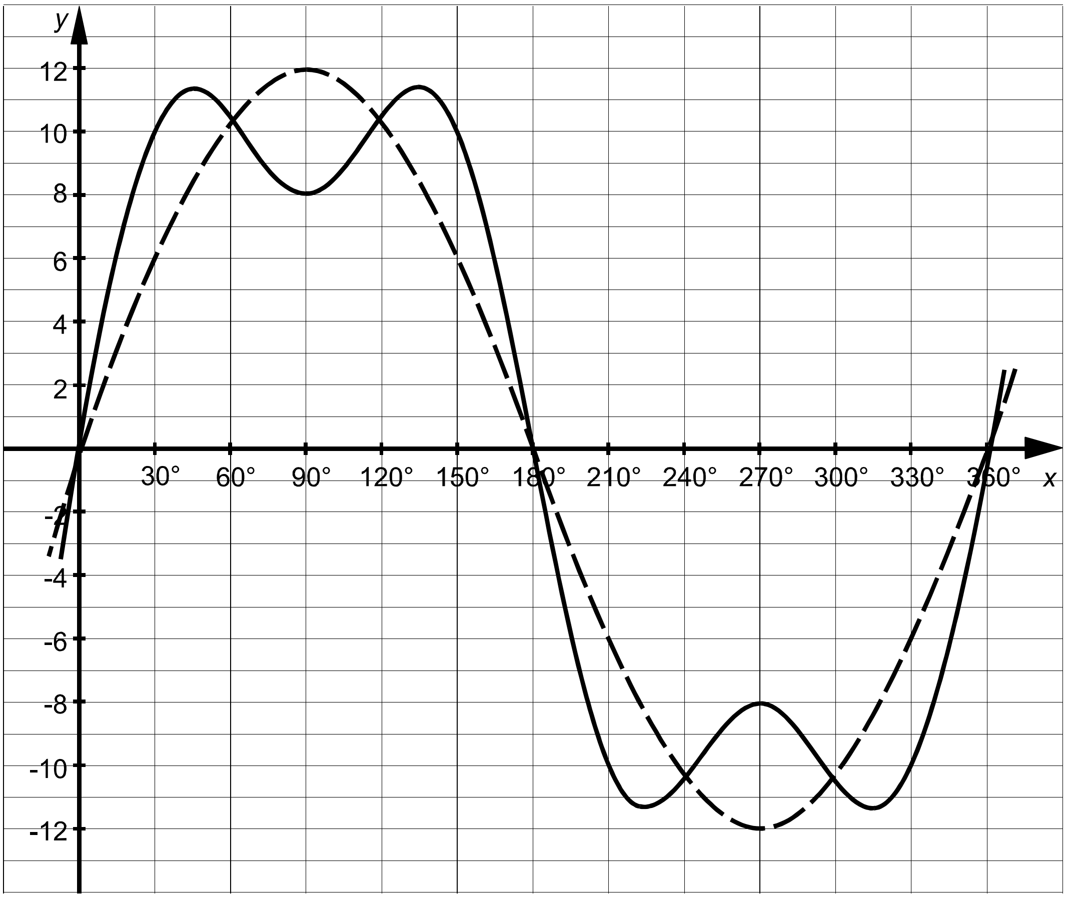
Figur 1

- Figur 2 visar grafen till funktionen $y = 10\sin x + c\sin 2x$
  Funktionen beskriver en ton som består av en grundton och dess första överton.
  Bestäm konstanten c.



Figur 2

- Figur 3 visar graferna till de funktioner som beskriver en grundton $y = 12\sin x$, samt den ton $y = 12\sin x + d\sin kx$ som fås av grundtonen tillsammans med en överton.
  Bestäm konstanterna *d* och *k*.



Figur 3

- Antag att du har en figur som visar graferna till funktionerna $y = p\sin x$ och $y = p\sin x + q\sin nx$, där *n* är ett heltal större än två.
  Beskriv en generell metod för hur man kan bestämma konstanterna *p*, *q* och *n* med hjälp av graferna. (2/4/¤)

Tabell 2 Kategorisering av uppgifterna i D-kursprovet i Matematik vt 2002 i förhållande till betygskriterier och kursplanemål 2000 (återfinns längst bak i detta häfte)

				Kunskapsområde														Betygskriterium														
Upp-gift nr	g poäng	vg poäng	¤	Övr			Trigonometri				Diff & integral							Godkänd				Väl godkänd						Mycket väl godkänd				
				1	4	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5
1	2	0													x	x		x		x												
2	2	0							x		x							x		x												
3	2	0						x										x														
4	1	0					x											x														
5	3	0							x						x			x														
6	2	0													x	x		x		x												
7	0	2														x						x		x	x							
8	2	0												x				x		x												
9	2	0								x								x		x												
10a	1	0			x													x														
10b	2	0															x	x		x												
10c	0	1													x							x										
11	2	1								x								x	x	x				x	x							
12	0	3											x		x	x						x		x	x							
13a	0	1							x													x										
13b	0	2													x	x						x		x	x							
14a	0	2									x											x		x								
14b	0	3	¤								x	x										x	x	x	x	x		x				
14c	0	1										x										x		x								
15	2	4	¤					x	x				x					x	x	x		x	x	x	x			x	x		x	
Σ	23	20		1/0			10/6				12/14																					

Kravgränser

Detta prov kan ge maximalt 43 poäng, varav 23 g-poäng.

Undre gräns för provbetyget

Godkänd:	12 poäng.
Väl godkänd:	24 poäng varav minst 6 vg-poäng.
Mycket väl godkänd:	24 poäng varav minst 12 vg-poäng. Eleven ska dessutom ha visat *MVG-kvaliteter i en* av ¤-uppgifterna.

Bedömningsanvisningar (MaD vt 2002)

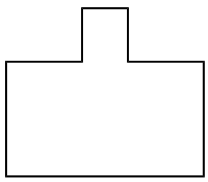
Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Bedömningen ”godtagbar” ska tolkas utifrån den undervisning som föregått provet. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen.

Del I

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
1.		**Max 2/0**
	Korrekt primitiv funktion	+1 g
	med korrekt svar (27)	+1 g
2.		**Max 2/0**
	Korrekt deriverad funktion	+1 g
	med korrekt svar $\left(f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \right)$	+1 g
3.		**Max 2/0**
	Godtagbar amplitud och period	+1 g
	Godtagbar fasförskjutning	+1 g
	(ekvationen för kurva *B* är $y = 2\sin(x - 15^\circ)$)	
4.		**Max 1/0**
	Korrekt svar (B: $\sin x = 0{,}8$)	+1 g
5.		**Max 3/0**
	Bestämt minst en primitiv funktion till $g'(x)$ korrekt.	+1 g
	Förstått att utnyttja $g(\pi) = 2$ för bestämning av konstanten utifrån erhållen primitiv funktion,	+1 g
	med korrekt svar $\left(g(x) = -\frac{\cos 3x}{3} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{5}{3} \right)$	+1 g
6.		**Max 2/0**
	Korrekt uppställd ekvation med hjälp av primitiv funktion ($\ln a - \ln 1 = 2$)	+1 g
	med godtagbart svar ($a = e^2$)	+1 g

Uppg.		Bedömningsanvisningar	Poäng
7.			**Max 0/2**
		Redovisat godtagbar lösning (3,3)	+1-2 vg

Del II

Uppg.		Bedömningsanvisningar	Poäng
8.			**Max 2/0**
		Korrekt deriverad funktion ($y' = 20\mathrm{e}^{2x}$)	+1 g
		Visat att funktionen satisfierar differentialekvationen	+1 g
9.			**Max 2/0**
		Redovisat godtagbar metod, t ex tecknat ekvationen $7^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos A$ som kan användas för bestämning av någon av triangelns vinklar,	+1 g
		med godtagbart svar (78°)	+1 g
10.			**Max 3/1**
	a)	Godtagbart svar (62 s)	+1 g
	b)	Godtagbar motivering	+1 g
		med godtagbart svar (41,5 cm)	+1 g
	c)	Godtagbar skiss 	+1 vg
11.			**Max 2/1**
		Redovisat godtagbar metod	+1 g
		Angett ett av de två fallen	+1 g
		Ytterligare ett fall med väl motiverad lösning (0,24 m alternativt 1,84 m från flaggans nedre fäste)	+1 vg
12.			**Max 0/3**
		Godtagbart tecknat integral $\left(\int_0^{1,1183} (\mathrm{e}^{0,2x} - x^2)\,\mathrm{d}x \right)$	+1-2 vg
		med godtagbart svar (0,787 ae)	+1 vg

Uppg.	Bedömningsanvisningar	Poäng
13.		**Max 0/3**
a)	Visat att likheten gäller.	+1 vg
b)	Korrekt bestämd primitiv funktion	+ 1 vg
	med korrekt svar $\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right)$	+1 vg
14.		**Max 0/6/¤**
a)	Redovisat godtagbar metod	+1 vg
	med godtagbart svar $(-0{,}4)$	+1 vg
b)	Beräknat andraderivatan $(\ y'' = a\mathrm{e}^{-ax^2}(2ax^2-1)\ )$	+1-2 vg
	Tecknad ekvationen $y''=0$	+1 vg
	Genom att klara uppgiften visar eleven kvaliteter på MVG-nivå genom att använda generella metoder och modeller vid problemlösning samt redovisar en klar tankegång.	¤
c)	Bestämt a $\left(a=\frac{1}{2}\right)$	+1 vg

Uppg. **Bedömningsanvisningar** **Poäng**

15. **Max 2/4/¤**

Uppgiften ska bedömas med s.k. aspektbedömning. Bedömningsanvisningarna innehåller två delar.

- Först beskrivs i en tabell olika kvalitativa nivåer för tre olika aspekter på kunskap som läraren ska ta hänsyn till vid bedömningen av elevens arbete.
- Därefter ges exempel på bedömda elevlösningar med kommentarer och poängsättning.

<table>
<tr><th>Bedömningen avser</th><th colspan="2">Kvalitativa nivåer
Lägre →</th><th colspan="2">→ Högre</th><th>Total poäng</th></tr>
<tr><td>Metodval och genomförande
I vilken grad eleven kan tolka en problemsituation och lösa olika typer av problem.
Hur fullständigt och hur väl eleven använder metoder och tillvägagångssätt som är lämpliga för att lösa problemet.</td><td>Eleven bestämmer amplituderna i figur 1 korrekt t.ex. genom avläsning. ($a = 10$ och $b = 4$)
1g</td><td colspan="2">Eleven bestämmer amplituderna i figur 1 korrekt samt använder och redovisar en lämplig metod för bestämning av konstanten c. ($c = 5$)
1g och 1vg</td><td>Eleven bestämmer amplituderna i figur 1 korrekt, använder och redovisar lämpliga metoder för bestämning av konstanterna c, d och k. ($d = 4$ och $k = 3$)
1g och 2vg</td><td>1/2</td></tr>
<tr><td>Matematiska resonemang
Förekomst och kvalitet hos värdering, analys, reflektion, bevis och andra former av matematiska resonemang.</td><td colspan="2"></td><td colspan="2">Eleven använder resonemang som leder till metoder för bestämning av alla konstanterna. Åtminstone resonemanget bakom bestämningen av konstanterna i figur 3 ska vara redovisade.
1vg</td><td>0/1</td></tr>
<tr><td>Redovisning och matematiskt språk
Hur klar, tydlig och fullständig elevens redovisning är och hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.</td><td colspan="2">Redovisningen är möjlig att förstå och följa
1g</td><td colspan="2">Redovisningen är välstrukturerad och tydlig. Det matematiska språket är acceptabelt.
1g och 1vg</td><td>1/1</td></tr>
<tr><td>Summa</td><td colspan="4"></td><td>2/4</td></tr>
</table>

Eleven beskriver en generell metod för bestämning av amplituder och perioder för liknande problem. Redovisningen är välstrukturerad och tydlig. Eleven använder ett matematiskt språk och gör det på i huvudsak korrekt sätt. ¤

Exempel på bedömda elevlösningar till uppgift 15

Elev 1 (2 g)

$y = a\sin x$ det är den stora vågen, en våg per 360°
vågen är högst på 10

$y = b\sin 4x$ det är den kortare vågen
fyra upprepningar per 360°
den är högst på 4

SVAR: $a = 10$ $b = 4$

Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	X	1/0	
Matematiska resonemang	X	0/0	
Redovisning och matematiskt språk	X	1/0	Elevens redovisning är någorlunda fullständig.
Summa		**2/0**	

Elev 2 (2 g och 1 vg)

15. a) $y_1 = a \sin x$ $\quad$ $a =$ Amplituden $= A$ $\quad$ Se fig!

$y_2 = b \sin 4x$

$y_1 = A_1 \sin x = 10 \sin x$

$y_2 = A_2 \sin 4x = 4 \sin 4x$

Svar: $a = 10$

$b = 4$

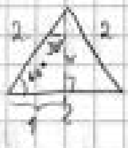
b)

x	y
$60°$	13
$180°$	0
$300°$	-13
$360°$	0

$y = 10 \sin x + c \sin 2x$

$13 = 10 \sin 60° + c \sin 120°$

$13 = \frac{10\sqrt{3}}{2} + c\frac{\sqrt{3}}{2}$



$2^2 = 1^2 + x^2$

$x = \sqrt{3}$

$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$13 - 5\sqrt{3} = c\frac{\sqrt{3}}{2}$

$2(13 - 5\sqrt{3}) = \sqrt{3} \cdot c$

$\frac{2(13 - 5\sqrt{3})}{\sqrt{3}} = c$

$c = 16$

Svar: $c = 16$

c)

$y = 12 \sin x + \sin kx$ $d = 5$

$k = 2$

d) Jag har ingen generell metod.

Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	X	1/1	Räknefel vid beräkning av konstanten *c*.
Matematiska resonemang	X	0/0	
Redovisning och matematiskt språk	X	1/0	
Summa		**2/1**	

Elev 3 (2 g och 4 vg och ¤)

15a) $a = 10$ (se fig.)

$b = 4$ — " —

max för sinus = 1

$y_{1max} = 10$

$a \cdot 1 = 10$

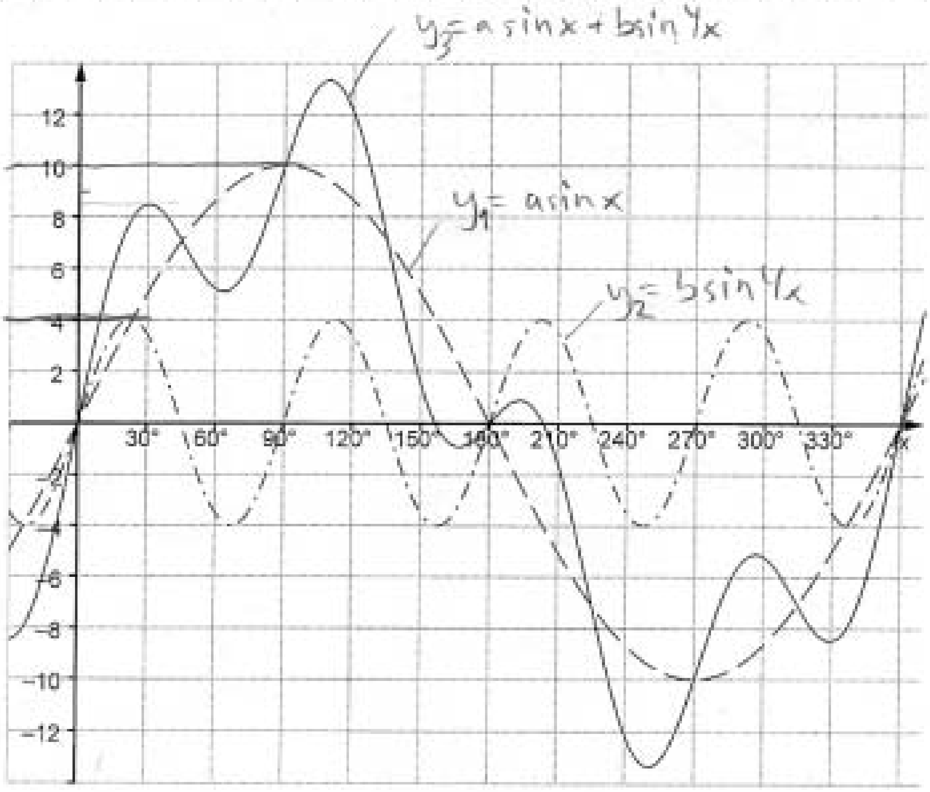
$a = 10$

b:

$y_{2max} = 4$

$b \cdot 1 = 4$

$b = 4$



Figur 1

b) $y_4 = 10\sin x + c\sin 2x$

grundton: $y_5 = a\sin x = 10\sin x$

1:a övertonen: $y_6 = b\sin 2x = c\sin 2x$

$\sin 2x \Rightarrow$ Perioden $= 180°$

$y_6 = c\sin 2x$ har sitt maxvärde vid $45°$

$\sin = 1$ vid $90°$

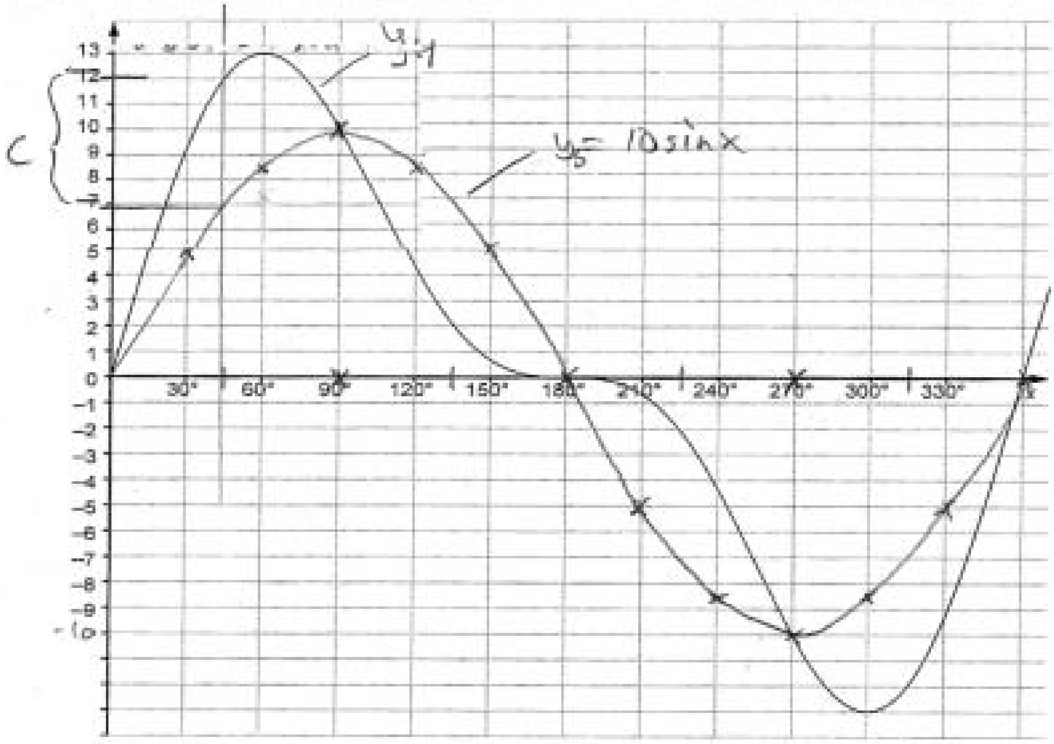
$y_6 = c$

$y_4(90) = 12$

$y_5(90) = 7$

(se fig) $y_6 = y_4 - y_5 = 12 - 7 = 5$

Svar: $c = 5$



Figur 2

15c)

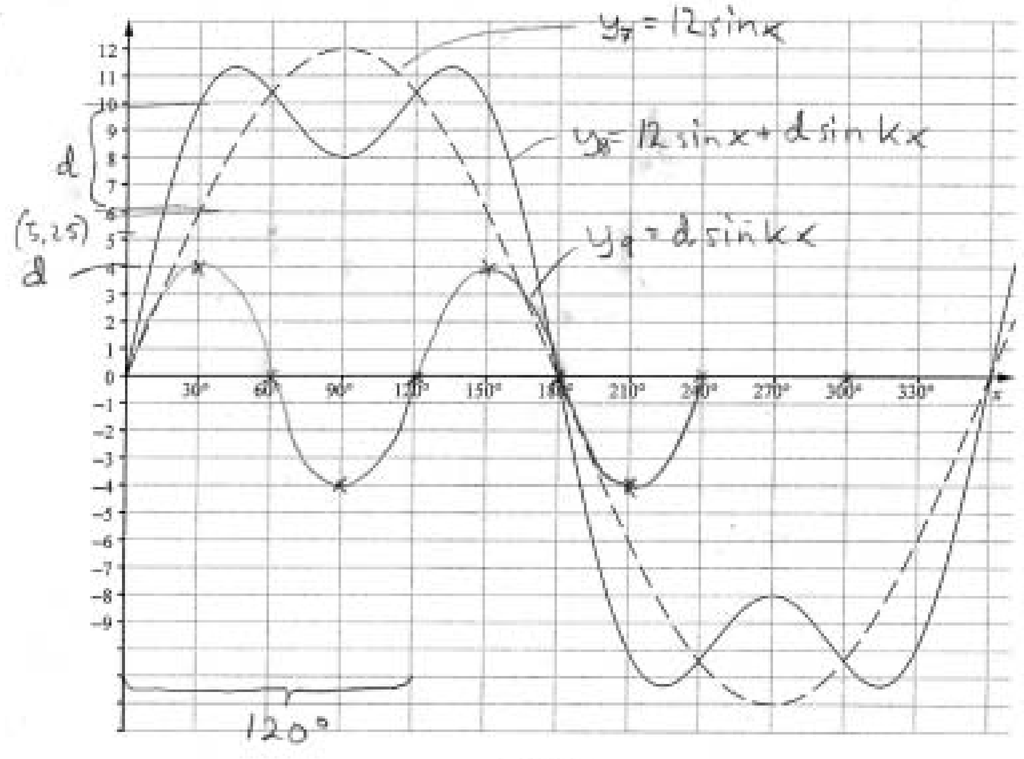
$d = 10 - 6 = 4$ (se fig)

Period$(y_9) = 120°$

$$k = \frac{360°}{120°} = 3$$

$y_9 = 4\sin 3x$

Svar $d = 4$, $k = 3$



Figur 3

15d) $y = p\sin x + q\sin nx$ $\quad n > 2$

Rita in en kurva som är differansen mellan kurvan för grundtonen och den sammansatta kurvan:

$q\sin nx = y - p\sin x$

p och q fås genom att kontrollera resp. kurvas högsta värde som motsvarar p och q

$$n = \frac{360^\circ}{\text{perioden för nya kurvan}}$$

Min metod är (mycket) logisk

Man kan kontrollera värderna genom att sätta in i formlen: $y = p\sin x + q\sin nx$ och lösa ut den bokstav man vill ha reda på

Bedömning

	Kvalitativa nivåer	Poäng	Motiveringar
Metodval och genomförande	X	1/2	
Matematiska resonemang	X	0/1	
Redovisning och matematiskt språk	X	1/1	
Summa		**2/4**	

Eleven beskriver en generell metod. Eleven tolkar resultaten med matematiska resonemang. Eleven använder ett matematiskt språk och gör det på i huvudsak korrekt sätt. ¤